Algebra III - Abstraktna algebra, 18.02.2016.

1. Katere od naslednjih trditev so pravilne? Odgovore utemelji!
(25%)(a) Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementi poljubne grupe G. Potem velja

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

(25%)(b) Vsaka grupa reda 79 je ciklična.
(25%)(c) Grupa $\mathbf{Z}_{35}$ ima 24 generatorjev.
(25%)(d) Grupa G z enoto e, v kateri velja $x^2 = e$ za vsak $x \in G$, je abelska.

Re.
(a.) $(x_1x_2...x_n)(x_yx_2...x_n)^{-1} = e$, $(x_1x_2...x_n)(x_n^{-1} \cdots x_2^{-1}x_1^{-1}) = e$.
(b.) Naj bo $|G| = 79$. Potem $\forall a \in G$, $a \neq e$, $\langle a \rangle = G$.
(c.) Da. ($\langle 0 \rangle \neq G$, $\langle 5 \rangle \neq G$, $\langle 7 \rangle \neq G$,...)
(d.) $(xy)^2 = e$, $xyxy = e$, $x^2yxy = x$, $yxy = x$, $xy = yx$.

□

2. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ elementa simetrične grupe S_8.
(40%)(a) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt disjunktnih ciklov.
(30%)(b) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt 2-ciklov (kot produkt transpozicij).
(30%)(c) Določi α^{-2}.

Re.
(a.) $\alpha = (12345)(678)$, $\beta = (23847)(56)$, $\alpha\beta = (12485736)$.
(b.) $\alpha = (15)(14)(13)(12)(68)(67)$, $\beta = (27)(24)(28)(23)(56)$, $\alpha\beta = (16)(13)(17)(15)(18)(14)(12)$.
(c.) $\alpha^{-2} = (14253)(678)$.

□

3. Poišči vse leve odseke podgrupe H v grupi G, če je:
(40%)(a) $G = \mathbb{Z}_{24}$ in $H = \langle 4 \rangle$.
(60%)(b) $G = S_3$ in $H = \langle (23) \rangle$.

Re.
(a.) $H = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$, $1 + H = \{1, 5, 9, 13, 17, 21\}$, $2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$, $3 + H = \{3, 7, 11, 15, 19, 23\}$.
(b.) $H = (23)H = \{\mathrm{id}, (23)\}$, $(12)H = (123)H = \{(12), (123)\}$, $(13)H = (132)H = \{(13), (132)\}$.

4. Dana je množica $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ kje so f_1, f_2, f_3 in f_4 preslikave definirane z

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = -x, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Pokaži, da je $(G, \circ)$ grupa, kjer je $\circ$ označuje običajno komponiranje funkcij.

Re.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

□

Naloge so povzeti z `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`